**Применение градиентного метода**

Постановка задачи. Записать градиентный метод решения задачи

4134

Постоянный шаг

Что Вы можете сказать относительно сходимости метода при разных ? Насколько существенно начальное приближение , – как оно влияет на сходимость метода? на скорость сходимости? Исследуйте наискорейший спуск.

Решение. Градиентный метод:

Тогда

или в виде системы:

Для **постоянного шага**: . Тогда

Выпишем несколько итераций:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0.8 | 0.7333 | 0.53777 | 0.39431 |
|  | 0.8 | 0.7333 | 0.53777 | 0.39431 |

Для **постоянного шага**: . Тогда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0.8 | 0.21777 | 0.101162 | 0.04742 |
|  | 0.8 | 0.7333 | 0.101162 | 0.04742 |

Для **постоянного шага**: . Тогда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0.2 | 0.04 | 0.008 | 0.0016 |
|  | 0.2 | 0.04 | 0.008 | 0.0016 |

Метод Наискорейшего спуска

f(X)=0.4\*x12+0.4\*y2  
**Итерация №1**.  
X0=(-1;-1).  
Вычислим значение функции в начальной точке f(X0) = 0.8.  
В качестве направления поиска выберем вектор градиент в текущей точке:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0.8x1 | | 0.8y | |  | |

Значение градиента в точке X0:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X0) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -0.8 | | -0.8 | |  | |

Проверим критерий остановки:  
|▽f(X0)| < ε  
Имеем:  
  
Сделаем шаг вдоль направления антиградиента.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 = X0 - λ1▽ f(X0) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -1 | | -1 | |  | | - λ1 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -0.8 | | -0.8 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0.8λ1-1.0 | | 0.8λ1-1.0 | |  | |

Вычислим значение функции в новой точке.  
f(X1) = 0.4\*(0.8\*λ1-1.0)2+0.4\*(0.8\*λ1-1.0)2  
Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции (f'(X)=0):  
1.024\*λ1-1.28 = 0  
Получим шаг: λ1 = 1.25  
Выполнение этого шага приведет в точку:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -1 | | -1 | |  | | - 1.25 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | -0.8 | | -0.8 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | |

**Итерация №2**.  
X1=(0;0).  
Вычислим значение функции в точке f(X1) = 0.  
Значение градиента в точке X1:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ▽ f(X1) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | |

Проверим критерий остановки:  
|▽f(X1)| < ε  
Имеем:  
|▽f(X1)| = 0>0  
Сделаем шаг вдоль направления антиградиента.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y = X1 - λ2▽ f(X1) = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | | - λ2 | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | | 0 | | 0 | |  | |

Вычислим значение функции в новой точке.  
f(Y) = 0.4\*(0)2+0.4\*(0)2  
Найдем такой шаг, чтобы целевая функция достигала минимума вдоль этого направления. Из необходимого условия существования экстремума функции (f'(X)=0):  
0 = 0  
Данное уравнение не имеет действительных корней.  
Функция не имеет глобального экстремума.